EURELEC

MATHEMATIQUES

COURS DE BASE

ELECTRONIQUE

Dans la présente série de leçons, nous ne nous occuperons pas des mathématiques en général, parce que l'étude de cette dernière nous entraînerait trop loin de l'objet du présent cours, mais nous examinerons les principales applications des mathématiques au calcul des circuits.

Pour obtenir une expression mathématique, ou une représentation graphique, à partir de l'énoncé d'une loi, il faut suivre des procédures bien définies que nous allons étudier au cours de la première partie de ces leçons.

Naturellement, nous supposerons connues les notions élémentaires d'artihmétique, c'est-à-dire les QUATRE OPERATIONS FONDAMENTALES qui sont : l'ADDITION, la SOUSTRACTION, la MULTIPLICATION et la DIVISION.

Toutefois, lorsque cela sera nécessaire pour apporter plus de clarté ou pour remettre en mémoire des notions qui pourraient avoir été oubliées, nous rappellerons certaines propriétés et règles particulières ayant trait aux quatre opérations fondamentales.

Les leçons de mathématiques constituent un groupe de leçons complémentaires, destinées aux élèves désirant consolider, au moyen de calculs simples et utiles, les notions apprises pendant le cours.

Nous vous précisons donc que l'étude des leçons de mathématiques n'est pas indispensable ; toutefois, elle s'avèrera très utile pour le travail normal de laboratoire, car les MATHEMATIQUES AIDENT A RESOUDRE RAPIDEMENT DE NOMBREUX PROBLEMES DE CARACTERE PRATIQUE.

1 – LES FORMULES

Actuellement, on a beaucoup pris l'habitude d'abréger les écrits de tout genre en utilisant les initiales des mots composant le texte écrit.

De nombreuses organisations industrielles, commerciales et politiques, se font connaître par des sigles formés de quelques lettres que le public garde facilement en mémoire, même s'il oublie souvent leur signification exacte.

L'habitude des abréviations est entrée depuis très longtemps dans le domaine des sciences mathématiques, chimiques et physiques, donnant un degré de concision très élevé aux descriptions scientifiques ce qui est un avantage appréciable pour la sûreté des calculs effectués.

Au cours des leçons, nous avons vu comment on peut représenter certaines grandeurs électriques par les lettres suivantes de l'alphabet :

V	=	différence de potentiel, tension électrique
C	=	capacité électrique
I	=	intensité du courant électrique
R	=	résistance électrique etc...

Les abréviations de ce type sont à la base de toutes les simplifications mathématiques qu'il convient d'exécuter pour obtenir des expressions mathématiques.

La méthode peut être étendue à la représentation de toutes les grandeurs apparaissant dans l'étude des phénomènes, à condition de TOUJOURS PRECISER LA SIGNIFICATION DE CHAQUE LETTRE, et de veiller ensuite, à n'utiliser chacune de celles-ci, que pour indiquer la grandeur correspondante.

Par conséquent, si nous avons établi par exemple que les lettres V, I et R représentent respectivement la tension, l'intensité du courant et la résistance d'un circuit électrique, que nous sommes en train d'examiner, nous ne pourrons pas, par la suite, attribuer à ces mêmes lettres une autre signification, et nous ne pourrons pas exprimer les mêmes grandeurs par des lettres différentes.

Chaque lettre de l'expression mathématique représente non seulement un type donné de grandeur, mais elle représente aussi, toutes les valeurs possibles de cette même grandeur : par exemple la lettre V, utilisée pour indiquer la tension, peut signifier 1 volt, 25 volts, 220 volts etc... c'est-à-dire toutes les valeurs de tension possibles.

De façon analogue, la lettre I utilisée pour indiquer l'intensité du courant, peut signifier 0,5 ampère, 2 ampères, 5 ampères etc....

De même, la lettre R représentant la résistance du circuit peut signifier 3 ohms, 100ohms, 10 000 ohms etc...

Cette règle est valable pour toute autre lettre utilisée dans une expression mathématique.

En plus des lettres, on trouve des NOMBRES QUI RESTENT INCHANGES LORSQUE L'ON ASSIGNE SUCCESSIVEMENT AUX LETTRES TOUTES LES VALEURS POSSIBLES.

Entre les lettres et les nombres fixes, figurent également les symboles des OPERATIONS et le symbole de l'EGALITE :

Le signe + indique l'ADDITION

Le signe – indique la SOUSTRACTION

Le signe X indique la MULTIPLICATION

Le signe : indique la DIVISION

Le signe = indique la relation d'EGALITE.

Toutefois il est très habituel de remplacer le signe de la division par une barre séparant le dividende du diviseur, c'est-à-dire que l'on utilise des expressions du type $\frac{A}{B}$ et quelquefois A/B au lieu de A : B, pour indiquer que la valeur d'une certaine grandeur A doit être divisée par la valeur d'une autre grandeur B.

Voyons maintenant comment on obtient la simplification mathématique de l'énoncé d'une loi physique en prenant comme exemple la loi d'ohm.

La loi d'ohm est exprimée dans les termes suivants :

– Lorsque la tension augmente, l'intensité du courant augmente aussi

– On obtient la résistance en divisant la tension par l'intensité

– On obtient la tension en multipliant la résistance par l'intensité

– On obtient l'intensité en divisant la tension par la résistance.

La première partie de l'énoncé est purement descriptive et ne peut pas être traduite par une expression mathématique utilisable pour le calcul, parce qu'elle ne précise pas dans quelle mesure l'intensité augmente lorsque la tension appliquée au circuit augmente.

Au contraire, les trois parties suivantes de l'énoncé se prêtent à une traduction mathématique complète.

Voici comment on procède dans chaque cas :

1 - ON OBTIENT LA RESISTANCE EN DIVISANT LA TENSION PAR L'INTENSITE.

On peut donc écrire :

RESISTANCE = TENSION : INTENSITE

Ceci est le premier pas et aussi le plus important que l'on vient d'accomplir pour arriver à l'expression mathématique.

Le pas suivant consiste simplement à remplacer les mots par des lettres déterminées de l'alphabet. Donc, si nous convenons de représenter la résistance par la lettre R, la tension par la lettre V et l'intensité par la lettre I, nous pouvons exprimer la relation précédente de la façon suivante :

$$R = V : I$$

ou, en changeant simplement le symbole de la division :

$$R = \frac{V}{I}$$

Avec ce résultat, nous avons obtenu la simplification la plus poussée de la première partie de l'énoncé, en mettant bien en évidence l'opération qu'il faut exécuter pour obtenir la valeur de la résistance d'un circuit en connaissant les valeurs de la tension et de l'intensité.

Les expressions de ce genre, qui contiennent des lettres (remplaçant les noms de grandeurs données), des symboles d'opérations (à effectuer avec les valeurs des grandeurs) et le symbole de l'égalité (qui exprime le lien existant entre une grandeur et les autres), sont appelées des FORMULES MATHEMATIQUES, ou plus simplement des FORMULES (à ne pas confondre avec les formules chimiques qui représentent non pas des opérations mathématiques, mais des réactions chimiques.

Lorsque la formule est obtenue il suffit de se la rappeler, et de se rappeler en même temps la signification exacte des lettres, afin de pouvoir l'utiliser de façon appropriée dans les calculs des circuits.

L'application de la formule est très facile : il suffit de remplacer les lettres par les valeurs connues des grandeurs, d'exécuter les calculs et d'interpréter le résultat de ces calculs.

EXEMPLE :

Un circuit auquel on applique une tension (V) de 15 volts est parcouru par un courant d'intensité (I) de trois ampères ; calculez d'après ces données, la résistance (R) de ce circuit.

Pour effectuer ce calcul d'une façon ordonnée, il convient d'écrire d'abord la formule et ensuite, sous cette dernière, l'expression que l'on obtient en remplaçant les lettres V et I par leurs valeurs respectives, soit 15 et 3, en indiquant aussi le résultat de l'opération :

$$R = \frac{V}{I}$$

$$R = \frac{15}{3} = 5 \text{ ohms.}$$

Le nombre 5 qui a été obtenu en effectuant la division 15 : 3, représente la valeur de la résistance R. Cette valeur de résistance est exprimée en ohms, c'est-à-dire en unités de mesure de la résistance, correspondant au volt, qui est l'unité de mesure de la tension, et à l'ampère, qui est l'unité de mesure de l'intensité du courant.

En conclusion du calcul effectué, on peut affirmer qu'un circuit auquel on applique une tension de 15 volts et dans lequel passe un courant d'une intensité de 3 ampères, doit avoir une résistance de 5 ohms, d'après la loi d'ohm .

Essayons maintenant d'interpréter par le même procédé, l'énoncé suivant :

2 – ON OBTIENT LA TENSION EN MULTIPLIANT LA RESISTANCE PAR L'INTENSITE.

En reprenant la simplification, on peut écrire :
TENSION = RESISTANCE x INTENSITE

et en conservant aux lettres la même signification qu'auparavant, nous obtenons la formule suivante :

V = R x I

L'application de cette formule est tout aussi simple que la précédente.

EXEMPLE :

Un circuit ayant une résistance (R) de 5 ohms est parcouru par un courant d'une intensité (I) de trois ampères ; calculez la valeur de la tension (V) appliquée à ce circuit :

On aura :

V = R x I

V = 5 x 3 = 15 volts

La tension appliquée au circuit est de 15 volts.

Traduisons maintenant le dernier énoncé de la loi d'ohm et mettons-le en formule :

3 - ON OBTIENT L'INTENSITE EN DIVISANT LA TENSION PAR LA RESISTANCE.

En effectuant de nouveau la simplification, on obtient :

INTENSITE = TENSION : RESISTANCE

et en remplaçant les mots par les lettres correspondantes, on obtient la formule :

I = V : R

ou $I = \dfrac{V}{R}$

EXEMPLE :

On applique à un circuit, ayant une résistance (R) de 5 ohms une tension (V) de 15 volts ; calculez l'intensité du courant (I) absorbée par ce circuit :

Donc :

$$I = \frac{V}{R}$$

$$I = \frac{15}{5} = 3 \text{ ampères.}$$

L'intensité du courant absorbé par le circuit est donc de 3 ampères.

Si nous confrontons maintenant les trois formules obtenues à partir des énoncés de la loi d'ohm, nous voyons immédiatement qu'elles sont différentes entre elles :

– La première $R = V / I$, représente une division de la tension par l'intensité, dont le résultat donne une valeur de résistance.

– La deuxième $V = R \times I$, représente une multiplication de la résistance par l'intensité dont le résultat donne une valeur de tension.

– La troisième $I = V / R$, représente une division de la tension par la résistance dont le résultat est une valeur d'intensité.

Puisqu'il existe trois formules distinctes, nous pourrions être amenés à penser qu'il existe trois lois d'ohm, c'est-à-dire trois liens, substantiellement différents entre eux, entre la tension, l'intensité et la résistance d'un même circuit ; cette conclusion serait erronée.

En réalité, les trois formules sont équivalentes entre elles, car elles ne représentent que trois aspects d'un même lien.

L'exactitude de cette affirmation peut être facilement démontrée à l'aide d'exemples choisis au hasard, qui montrent que toutes les valeurs qui satisfont une seule des trois formules, satisfont également les deux autres.

Dans les trois exemples ci-dessus, nous avons déjà trouvé que les valeurs de 15 volts, 3 ampères et 5 ohms, répondent de façon satisfaisante à la formule $R = V / I$, ainsi qu'aux formules $V = R \times I$ et $I = V / R$.

Considérons maintenant un autre exemple choisi par hasard.

EXEMPLE :

Un circuit ayant une résistance (R) de 150 ohms est parcouru par un courant d'une intensité (I) de 2 ampères ; calculez la valeur de la tension (V) appliquée à ce circuit.

Pour calculer la valeur de la tension, il faut choisir entre les trois formules, celle qui présente, à gauche du signe = la lettre V, qui représente la tension. On voit immédiatement que la seconde formule est celle qui convient ; donc, en suivant la procédure habituelle, nous aurons :

$$V = R \times I$$

$$V = 150 \times 2 = 300 \text{ volts}$$

La tension appliquée au circuit est donc de 300 volts.

Nous pouvons maintenant nous assurer que ces mêmes valeurs de 150 ohms, 2 ampères et 300 volts répondent également aux deux formules restantes de la loi d'ohm.

En utilisant la première formule nous obtenons en effet :

$$R = V / I$$

$$R = 300 : 2 = 150 \text{ ohms.}$$

Le résultat de 150 ohms est exactement celui que nous attendions pour une tension de 300 volts et une intensité de 2 ampères, sur la base des calculs précédents.

En utilisant la troisième formule nous obtenons :

$I = V / R$

$I = 300 / 150 = 2$ ampères

Ce résultat de 2 ampères est aussi exactement celui auquel nous nous attendions, sur la base des calculs précédents.

On pourrait prendre de nombreux exemples semblables à celui-ci en partant de l'une quelconque des trois formules et en remplaçant successivement les deux valeurs données et la valeur calculée dans les deux formules restantes.

Chaque exemple démontrerait toujours que les trois valeurs de la tension, de l'intensité et de la résistance d'un même circuit,répondent de façon également satisfaisante aux trois formules.

Vous pouvez alors vous demander à quoi servent trois formules équivalentes, dérivées de la loi d'ohm, liant entre elles les mêmes valeurs. Une seule formule ne suffirait-elle pas ?

L'existence de trois formules, même équivalentes entre elles, est certainement utile, parce que chacune d'elles permet d'effectuer rapidement un calcul bien déterminé :

— avec la première formule ($R = V / I$), nous pouvons calculer rapidement la valeur de la résistance lorsque les valeurs de la tension et de l'intensité sont données ;

— avec la deuxième formule ($V = R \times I$), nous pouvons calculer rapidement la valeur de la tension en connaissant les valeurs de la résistance et de l'intensité ;

– avec la troisième formule ($I = V / R$), nous pouvons calculer les valeurs de l'intensité en connaissant tension et résistance.

IL EST INTERESSANT DE NOTER QUE LE NOMBRE DE FORMULES EQUIVALENTES OBTENUES A PARTIR DE LA LOI D'OHM, EST DE TROIS, DE MEME QU'IL APPARAIT TROIS LETTRES DIFFERENTES DANS LES FORMULES correspondant aux trois grandeurs caractéristiques du circuit (tension, intensité, résistance).

Cette concordance de nombres n'est pas le fait du hasard.

Si le nombre des grandeurs liées entre elles était deux, quatre ou cinq etc..., nous obtiendrions respectivement des formules contenant deux, quatre ou cinq lettres et un même nombre de formules équivalentes, toutes également aptes à exprimer complètement le lien entre les grandeurs considérées.

Si, pour toutes les lois de l'Electronique, nous devions suivre la même procédure que nous avons adoptée pour la loi d'Ohm, nous obtiendrions une quantité invraisemblable de formules, ce qui en rendrait l'étude excessivement longue et ardue.

On est donc amené à se poser une question : est-il vraiment nécessaire de tirer toutes les formules équivalentes d'une loi, puisqu'elles signifient toutes la même chose ?

La réponse est assez rassurante : il N'EST PAS NECESSAIRE DE TIRER DIRECTEMENT DE L'ENONCE D'UNE LOI, TOUTES LES FORMULES EQUIVALENTES : IL SUFFIT D'EN TIRER UNE SEULE, quelle qu'elle soit, et à partir de celle-ci, ON POURRA ENSUITE RECONSTITUER TOUTES LES AUTRES, au moyen de règles simples du calcul mathématiques.

Dans cette perspective, nous essaierons maintenant d'établir quelques unes des règles simples qui permettront de passer d'une formule donnée à une autre.

2 – LE CALCUL LITTERAL

Pour nous préparer à l'étude des règles qui permettent de passer rapidement et sans peine d'une formule à l'autre, considérons maintenant les trois formules de la loi d'ohm, sous un angle différent.

En premier lieu, convenons d'appeler PREMIER MEMBRE, la partie de la formule qui se trouve à gauche du signe =, et, d'appeler SECOND MEMBRE, la partie qui se trouve à sa droite.

PREMIER MEMBRE	SECOND MEMBRE
R	V/I
V	R x I
I	V / R

Cette convention est valable pour les trois formules précédentes, de même que pour une formule quelconque, ou en général pour une expression mathématique consituée de deux parties liées entre elles par une relation d'égalité.

Lorsque le signe = apparaît dans une expression mathématique, la règle suivante est toujours valable:

REGLE 1 – SI L'ON ECHANGE ENTRE EUX LE PREMIER ET LE SECOND MEMBRE DE L'EXPRESSION, ON OBTIENT UNE NOUVELLE EXPRESSION EQUIVALENTE A LA PREMIERE.

En nous basant sur cette règle, nous pourrons écrire indifféremment :

$R = V / I$ ou $V / I = R$

V = R x I	ou	R x I = V
I = V / R	ou	V / R = I

En effet, si nous considérons les valeurs correspondant aux lettres (15 volts, 3 ampères et 5 ohms) qui ont été trouvées au cours des trois premiers exercices de cette leçon, nous ne trouvons aucune différence entre :

5 = 15 / 3	ou	15 / 3 = 5
15 = 5 x 3	ou	5 x 3 = 15
3 = 15 / 5	ou	15 / 5 = 3.

L'utilisation de l'une ou de l'autre formule, déduites l'une de l'autre en échangeant entre elles les deux membres, dépend seulement de notre libre choix dans la façon de nous exprimer : nous pouvons dire de façon tout aussi correcte, que 5 est égal à 15 divisé par 3, ou que 15 divisé par 3 est égal à 5.

Lorsqu'une expression mathématique et en particulier, une formule contient une multiplication, nous pourrons appliquer la règle suivante :

REGLE 2 – SI L'ON ECHANGE ENTRE EUX LES DEUX FACTEURS D'UNE MULTIPLICATION, LE RESULTAT NE CHANGE PAS.

En combinant cette règle à la précédente, nous pouvons écrire par exemple, la deuxième formule de la loi d'ohm des quatre façons suivantes : toutes les quatre également correctes :

V = R x I ou V = I x R ou R x I = V ou I x R = V.

En effet en reprenant le précédent exemple numérique, on trouve que les valeurs admissibles dans la première des quatre formules indiquées ici, sont également admissibles pour les trois autres :
15 = 5 x 3 ou 15 = 3 x 5 ou 5 x 3 = 15 ou 3 x 5 = 15.

Jusqu'ici nous avons considéré seulement l'aspect extérieur des formules, en changeant les lettres de place sans en changer la valeur ; maintenant, nous allons faire quelque chose de plus : en nous basant sur quelques autres règles, nous changerons les valeurs représentées dans une seule formule, en conservant toutefois l'égalité entre le premier et le second membre.

REGLE 3 – SI ON MULTIPLIE LE PREMIER ET LE SECOND MEMBRES D'UNE FORMULE PAR UN MEME NOMBRE, ON CONSERVE L'EGALITE ENTRE LES DEUX MEMBRES.

Pour être plus brefs, nous allons considérer seulement la première formule de la loi d'ohm, en nous rappelant toutefois que les mêmes considérations peuvent s'appliquer à toute autre formule.

Multiplions le premier et le second membres de la formule $R = V/I$, par un même nombre, par exemple 7, et, admettons que la valeur R soit 150 ohms, celle de V de 300 volts et celle de I de 2 ampères ; nous aurons :

$$R \times 7 = V/I \times 7$$

$$150 \times 7 = 300 / 2 \times 7$$

$$1050 = 150 \times 7$$

$$1050 = 1050.$$

Le résultat nous indique de façon évidente que malgré la multiplication effectuée, le premier et le second membres restent toujours égaux entre eux.

REGLE 4 – SI ON DIVISE LE PREMIER ET LE SECOND MEMBRES D'UNE FORMULE PAR UN MEME NOMBRE, ON CONSERVE TOUJOURS L'EGALITE DES DEUX MEMBRES.

Considérons par exemple la seconde formule de la loi d'ohm, soit V = R x I, et divisons le premier et second membres par 50, en remplaçant ensuite les lettres V, R et I par les mêmes valeurs que dans l'exemple précédent :

V : 50	=	R x I : 50
300 : 50	=	150 x 2 : 50
6	=	300 : 50
6	=	6.

Ce résultat démontre que, malgré la division à laquelle ils ont été soumis, le premier et le second membres restent toujours égaux entre eux.

Dans les deux exemples pris pour contrôler respectivement la troisième et la quatrième règles, on a choisi au hasard les nombres 7 et 50, mais n'importe quel autre nombre pourrait servir à démontrer la valeur des deux règles.

Voici maintenant deux autres règles permettant de passer rapidement d'une formule donnée à ses équivalentes :

REGLE 5 – SI UN MEMBRE DE LA FORMULE EST CONSTITUE PAR UNE DIVISION, LE DIVISEUR PEUT ETRE TRANSFERE A L'AUTRE MEMBRE COMME FACTEUR DE MULTIPLICATION.

Exemple : Prenons la troisième formule de la loi d'ohm, soit I = V/R. En nous basant sur la règle qui vient d'être énoncée, si on transporte le diviseur R au premier membre, on a :

I x R = V

Un exemple numérique choisi au hasard peut démontrer la validité de la règle.

Admettons que la valeur de la tension (V) soit égale à 60 volts et que celle de la résistance (R) soit égale à 15 ohms. L'intensité (I) que l'on obtient en divisant 60 par 15, devra être égale à 4 ampères.

Remplaçons maintenant les deux valeurs données et celle trouvée dans les deux formules (celle de départ et celle obtenue en appliquant la règle 5) :

1) $I = V / R$ 2) $I \times R = V$

$4 = 60 / 15$ $4 \times 15 = 60$

$4 = 4$ $60 = 60$

Ces deux résultats démontrent qu'en passant de la première formule à la seconde, on conserve le rapport d'égalité entre le premier et le second membres.

On peut donc conclure en confirmant que le transfert du diviseur du second au premier membre, n'entraîne aucune modification, puisque l'égalité continue d'exister entre les mêmes grandeurs, c'est-à-dire, entre V, R et I et leurs valeurs respectives.

Si nous observons maintenant la formule $I = V / R$ et celle que l'on obtient à partir de $I \times R = V$, nous remarquerons que, tandis que la première représente la troisième formule de la loi d'ohm, la seconde représente la seconde formule de la loi d'ohm.

En effet, comme on l'a déjà vu par la Règle 1, $I \times R = V$ est l'équivalent de $V = I \times R$, et en nous basant sur la Règle 2, $V = I \times R$, est équivalent à $V = I \times R$, qui est l'expression connue de la seconde formule de la loi d'Ohm.

REGLE 6 – SI UN MEMBRE DE LA FORMULE EST CONSTITUE PAR UNE MULTIPLICATION, L'UN DES FACTEURS QUEL QU'IL SOIT, PEUT ETRE TRANSFERE A L'AUTRE MEMBRE COMME DIVISEUR.

EXEMPLE :

Prenons la seconde formule de la loi d'Ohm, $V = R \times I$; en nous basant sur la règle précédente, en transportant du second au premier membre d'abord le facteur I et ensuite le facteur R, on aura respectivement :

$$\frac{V}{I} = R \qquad\qquad \frac{V}{R} = I$$

Les deux formules ainsi obtenues représentent respectivement la première et la troisième formules de la loi d'Ohm.

1)	$V = R \times I$	2) $V : I = R$	3) $V : R = I$
	$60 = 15 \times 4$	$60 : 4 = 15$	$60 : 15 = 4$
	$60 = 60$	$15 = 15$	$4 = 4.$

Comme on le voit, les trois résultats démontrent qu'on a conservé l'égalité des deux membres en passant de l'une à l'autre formule ; en outre, les valeurs de V, I et T, sont toujours les mêmes ; par conséquent, on peut conclure que les trois formules sont effectivement équivalentes pour exprimer la loi d'Ohm.

Les opérations au moyen desquelles on peut transférer une lettre d'un emplacement à l'autre d'une expression mathématique, en conservant l'égalité des deux membres prennent le nom de CALCUL LITTERAL (ou CALCUL ALGEBRIQUE), par analogie avec le nom de CALCUL NUMERIQUE (ou calcul ARITHMETIQUE) que l'on a donné aux opérations effectuées avec des nombres.

Nous essaierons maintenant de définir les notions qui ont été exposées ici, au moyen d'un exemple d'application du calcul littéral au domaine de l'électrotechnique.

2 - 1 - APPLICATION DU CALCUL LITTERAL

Nous savons que la résistance électrique dépend de la longueur, de la section et de la résistivité d'un condensateur.

Si nous voulions traduire en formules mathématiques cet énoncé, nous serions extrêmement embarassés, parce que : il n'a pas été précisé dans quelle mesure la résistance du conducteur augmente, quand on augmente la longueur et la résistivité, ni dans quelle mesure cette résistance diminue lorsque la section augmente.

Pour surmonter cet obstacle, il faut se référer à un énoncé plus précis, c'est-à-dire : ON OBTIENT LA RESISTANCE D'UN CONDUCTEUR, EN MULTIPLIANT LA RESISTIVITE PAR LA LONGUEUR DU CONDUCTEUR ET EN DIVISANT LE PRODUIT PAR LA SECTION DE CELUI-CI.

Cet énoncé peut être abrégé de la manière suivante :

$$\text{RESISTANCE} = \frac{\text{RESISTIVITE x LONGUEUR}}{\text{SECTION}}$$

Si nous convenons maintenant de représenter la résistance par la lettre R, la résistivité par la lettre grecque ρ (on la prononce "ro"), la longueur du conducteur par la lettre minuscule l, et la section transversale du conducteur par la lettre majuscule S, nous obtiendrons la formule :

$$R = \frac{\rho \times l}{S}$$

Au moyen de cette formule, on peut facilement calculer la résistance d'un conducteur quelconque lorsqu'on connaît sa longueur et sa section et la valeur de la résistivité de la matière.

Si la résistivité est exprimée au moyen de l'unité de mesure ohmcentimètre, la longueur en centimètres et la section en centimètres carrés, la valeur résultante de la résistance sera exprimée en ohms.

EXEMPLE :

Une barre cylindrique a une longueur (l) de 60 centimètres, une section (S) de 3 centimètres et elle est constituée d'une matière ayant une résistivité (ρ) de 2 ohmcentimètres ; calculez sa résistance (R).

$$R = \frac{\rho \times l}{S}$$

$$R = \frac{2 \times 60}{3} = \frac{120}{3} = 40 \text{ ohms.}$$

La résistance de la barre est de 40 ohms.

Jusqu'ici, la procédure est analogue à celle que nous avions suivie au cours de la première partie de cette leçon, en étudiant la loi d'Ohm du point de vue mathématique.

Toutefois, il reste à voir comment on doit procéder pour obtenir, à partir de la formule unique que l'on a trouvée, les autres formules équivalentes, soit :

1 – la formule qui permet de calculer la résistivité de la matière, lorsqu'on connaît la résistance, la longueur et la section du conducteur ;

2 – la formule qui permet de calculer la longueur qu'un conducteur de section et de résistivité données, doit avoir, pour présenter une résistance donnée ;

3 – la formule qui permet de calculer la section qu'un conducteur de longueur et de résistivité données doit avoir, pour obtenir une résistance donnée.

Les formules équivalentes sont donc au nombre de quatre, comme les grandeurs et comme les types de calculs nécessaires pour déterminer chaque grandeur en se basant sur la valeur des trois autres :

– une formule a été directement obtenue à partir de l'énoncé ;

– les trois autres formules peuvent être obtenues à partir de celle que l'on connaît déjà, au moyen de simples opérations de calcul littéral.

Voici comment l'on procède pour le calcul littéral.

Ecrivons la formule connue :

$$R = \frac{\rho \times l}{S}$$

et observons (en nous basant sur la Règle 6), que nous pourrons transférer la lettre ρ ou la lettre l dans le premier membre ; en outre, en nous basant sur la Règle 5, nous pourrons porter dans le premier membre, la lettre S.

Exécutons successivement trois opérations distinctes.

1) Portons d'abord la lettre S dans le premier membre et ensuite la lettre l :

$$R \times S = \rho \times l$$

$$\frac{R \times S}{l} = \rho$$

L'expression obtenue $\rho = \frac{R \times S}{l}$ est la première des trois formules équivalentes que nous cherchons à établir, c'est-à- dire la formule qui permet de calculer la résistivité en nous basant sur les valeurs données par les trois autres grandeurs.

EXEMPLE :

La longueur (l) d'un conducteur est 30cm, sa résistance (R) est 10Ω et sa section (S) est $3 cm^2$; calculons la résistivité (ρ) de la matière dont est constitué le conducteur.

$$\rho = \frac{R \times S}{l}$$

$$\rho = \frac{10 \times 3}{30} = \frac{30}{30} = \text{1ohmcentimètre.}$$

La résistivité est donc 1 ohmcentimètre.

2) Portons maintenant dans le premier membre de notre formule de départ, d'abord la lettre S et ensuite la lettre ρ.

$$R \times S = \rho \times l$$

$$\frac{R \times S}{\rho} = l$$

L'expression obtenue : $l = \dfrac{R \times S}{\rho}$ est la seconde des formules équivalentes cherchées, soit la formule qui permet de calculer la longueur d'un conducteur sur la base des valeurs des trois autres grandeurs.

EXEMPLE :

La résistivité (ρ) d'un conducteur est 3 ohmcentimètres, sa résistance (R) est 45 ohms, sa section (S) est 1 centimètre carré ; calculez la longueur (l) de ce même conducteur :

$$l = \frac{R \times S}{\rho} \qquad l = \frac{45 \times 1}{3} = 15\text{cm.}$$

La longueur du conducteur est donc de 15 centimètres.

3) Il reste à trouver la dernière formule équivalente ; à cette fin nous portons la lettre S du second dans le premier membre et ensuite la lettre R du premier dans le second membre:

$$R \times S = \rho \times l$$

$$S = \frac{\rho \times l}{R}$$

L'expression obtenue $S = \frac{\rho \times l}{R}$ est la troisième des formules équivalentes cherchées, c'est-à-dire, la formule qui permet de calculer la section d'un conducteur sur la base des valeurs des trois autres grandeurs.

EXEMPLE :

La résistance (R) d'un conducteur est 50 Ω, sa résistivité (ρ) est 1 ohmcentimètre, sa longueur (l) est 5cm ; calculez la section (S) de ce conducteur :

$$S = \frac{\rho \times l}{R}$$

$$S = \frac{1 \times 5}{50} = \frac{5}{50} : 50 = 0{,}1 \text{ cm}^2$$

La section du conducteur est donc 0,1 centimètre carré.

Dans cette application du calcul littéral, nous avons utilisé la Règle 1, la Règle 2, la Règle 5 et la Règle 6 ; nous n'avons pas employé les Règles 3 et 4.

Nous aurons plus tard l'occasion d'appliquer ces deux dernières règles qui seront particulièrement utiles lorsqu'on voudra changer les unités de mesure des grandeurs apparaîssant dans les formules.

3 – COMPLEMENTS D'ARITHMETIQUE

Dans la plupart des cas qui se présentent en électronique, l'application des formules consiste à exécuter des calculs brefs, pour lesquels il suffit de connaître les règles de l'arithmétique.

Nous supposons que vous savez effectuer les quatre opérations arithmétiques nécessaires, et nous ne recommencerons pas ici l'étude de ces opérations. Par contre, nous insisterons sur les moyens qui permettent de vérifier l'exactitude des calculs.

Les opérations arithmétiques sont au nombre de sept : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation à une puissance, l'extraction de racine et la détermination du logarithme d'un nombre.

Les quatre premières sont les opérations FONDAMENTALES que nous admettons être connues ; les trois autres par contre seront étudiées du point de vue pratique au cours des prochaines leçons de mathématiques.

Voyons maintenant comment on effectue les contrôles des opérations fondamentales.

ADDITION

Rappelons que les nombres à additionner s'appellent les TERMES et que le résultat de l'opération s'appelle la SOMME.

Pour contrôler le résultat d'une addition, il suffit de changer l'ordre des termes et de répéter le calcul : le nouveau résultat doit coïncider avec le premier.

Exemple :

ADDITION		CONTROLE	
1er terme	3 712	3ème terme	421
2ème terme	23	1er terme	3 712
3ème terme +	421	2ème terme+	23
Somme	4 156	Somme	4 156

On peut également après avoir effectué l'addition complète, faire la somme de deux termes seulement, puis retrancher le résultat de la somme totale. On doit alors retrouver la valeur du terme manquant.

Exemple : $421 + 23 = 444$ et $4\,156 - 444 = 3\,712$.

SOUSTRACTION

Rappelons que, pour effectuer une soustraction, on retranche un nombre d'un autre nombre qui est plus grand que le premier ; le résultat s'appelle la DIFFERENCE.

Pour contrôler le résultat d'une soustraction, il suffit d'additionner la différence et le plus petit nombre, la somme doit coïncider avec le plus grand nombre.

Exemples :

SOUSTRACTION		CONTROLE	
Grand nombre	9 722	Différence	8 723
Petit nombre	– 999	Petit nombre +	999
Différence	8 723	Grand nombre	9 722

SOUSTRACTION		CONTROLE	
Grand nombre	2,729	Différence	2,652
Petit nombre	– 0,077	Petit nombre +	0,077
Différence	2,652	Grand nombre	2,729

MULTIPLICATION

Rappelons que les nombres à multiplier entre eux s'appellent les **FACTEURS**, le premier étant le **MULTIPLICANDE**, le second le **MULTIPLICATEUR** et que le résultat s'appelle le **PRODUIT**.

Pour contrôler le résultat d'une multiplication on peut répéter le calcul en remplaçant les facteurs l'un par l'autre, le multiplicateur devenant le multiplicande ; le nouveau résultat doit correspondre au premier.

MULTIPLICATION		CONTROLE	
Multiplicande	48	Multiplicateur	71
Multiplicateur	x 71	Multiplicande	x 48
	48		568
	336		284
Produit	3408	Produit	3408

Cette façon de procéder peut, dans beaucoup de cas, paraître beaucoup trop longue, fastidieuse et donc incertaine. Il convient alors d'adopter une autre méthode appelée la preuve par neuf.

La preuve par neuf est certainement plus difficile à décrire qu'à effectuer, car elle consiste en de nombreux, mais très rapides calculs mentaux qui se succèdent dans l'ordre suivant :

1 – On examine les chiffres du multiplicande et on efface (mentalement) tous les 0 et tous les 9 pouvant s'y trouver.

On additionne les chiffres restants : si la somme est inférieure à 9 on note le résultat ; si la somme est égale à 9 on écrit 0 comme résultat ; si la somme est supérieure à 9, on additionne ses chiffres en suivant le même procédé, c'est-à-dire, en effaçant mentalement tous les zéro et tous les neuf.

Il peut encore arriver que la nouvelle somme soit supérieure à 9 ;

On répète alors le procédé jusqu'à ce que l'on obtienne un résultat final inférieur ou égal à 9. Si le résultat final est égal à 9, on écrit toujours 0 à la place de 9.

2 – On exécute les mêmes opérations avec les chiffres du multiplicateur et on note le résultat.

3 – On multiplie les deux résultats précédents l'un par l'autre et on note le produit obtenu : si celui-ci est supérieur à 9, on additionne les chiffres entre eux en suivant toujours le même procédé.

4 – Enfin, on répète les opérations décrites ci-dessus au paragraphe 1, avec les chiffres du produit qui avait été obtenu lors de la multiplication que l'on désire contrôler.

Le résultat final de ces opérations doit être égal à celui obtenu au paragraphe 3.

Exemples : (tous les calculs mentaux sont indiqués).

MULTIPLICATION

Multiplicande	837
Multiplicateur	x 19
	7533
	837
Produit	15903

CONTROLE

1) $8 + 3 + 7 = 18$; $1 + 8 = 9 = 0$
2) on ne prend pas en considération le 9, le résultat est donc 1
3) $0 \times 1 = 0$
4) $1 + 5 + 3 = 9 = 0$.

Les résultats obtenus aux paragraphes 3 et 4 étant égaux entre eux, puisqu'ils sont tous deux égaux à zéro, la preuve peut donc être considérée comme positive.

MULTIPLICATION

Multiplicande	1,28174
Multiplicateur	x 3,026
	769044
	256348
	3,84522
Produit	3,87854524

CONTROLE

1) 1 +2 +8+1+7 +4 =23; 2 + 3 =5

2) 3 +2+6 = 11 ; 1 +1 = 2

3) 5 x 2 = 10 ; on ne considère pas zéro, il reste 1.

4) 3+8 +7 +8 +5 + 4 + 5 + 2 +4= 46

4 +6 =10; en négligeant le zéro, il reste 1.

Les résultats obtenus aux paragraphes 3 et 4 étant égaux entre eux, puisqu'ils sont tous deux égaux à 1, on peut donc considérer cette preuve comme positive également.

Naturellement, la preuve par neuf paraîtra d'autant plus commode que l'on est plus apte à effectuer rapidement et sûrement les opérations de calcul mental indiquées.

Il faut toutefois signaler que la preuve par neuf ne donne pas la certitude absolue de ne pas avoir commis d'erreurs dans la multiplication, parce qu'il est possible que deux ou plusieurs erreurs aient été commises, qui se compensent dans les résultats de la preuve.

Toutefois, si la preuve donne un résultat positif, on peut être assez sûr du calcul ; si au contraire le résultat est négatif, on peut être absolument sûr de l'existence d'une erreur, qu'il faudra rechercher en refaisant toutes les opérations de la multiplication et des opérations de contrôle.

DIVISION :

Rappelons d'abord que le nombre à diviser s'appelle le DIVIDENDE, le nombre qui divise le DIVISEUR et le résultat de l'opération le QUOTIENT.

Pour contrôler le résultat d'une division dont le quotient est exact, c'est-à-dire, une division sans reste, il suffit de multiplier le quotient par le diviseur ; le produit obtenu doit être égal au dividende.

Exemple :

DIVISION

Dividende	12985	371 diviseur
	1855	35
	0	

CONTROLE

Quotient	35
Diviseur	x 371
	35
	245
	105
Dividende	12985

Pour contrôler le résultat d'une division ayant donné un reste, il faut multiplier entre eux le quotient et le diviseur et ensuite, additionner le reste au produit obtenu : la somme résultante doit être égale au dividende.

Exemple :

DIVISION

Dividende	3451	51 diviseur
	391	67 quotient
Reste	34	

CONTROLE

Quotient	67
Diviseur	x 51
	67
	335
	3417
Reste	+ 34
Dividende	3451

La règle précédente est valable même dans le cas où l'on a un quotient décimal, mais dans ce cas, le reste doit être présenté avec autant de décimales qu'il y a de décimales dans le quotient.

Exemples :

DIVISION			CONTROLE	
Dividende	57231,00	671 diviseur	Quotient	85,29
	3551	85,29 quotient	Diviseur	x 671
	1960			8529
	6180			59703
Reste	141(centièmes			51174
				57229,59
			Reste +	1,41
				57231,00

DIVISION			CONTROLE	
Dividende	5.000	7 diviseur	Quotient	0,714
	10	0, 714 quotient	Diviseur	x 7
	30			4,998
Reste	2 (millièmes)		Reste +	0,002
				5,000

Le reste obtenu après avoir effectué une division avec un quotient décimal, représente des dixièmes de l'unité si le quotient a un seul chiffre après la virgule, des centièmes de l'unité si le quotient a deux chiffres après la virgule, des millièmes de l'unité si le quotient a trois chiffres après la virgule, des dix millièmes de l'unité si le quotient a quatre chiffres après la virgule, et , ainsi de suite.

Le nombre des dixièmes s'exprime, sous forme décimale, en séparant le dernier chiffre à droite par une virgule ;

Le nombre des centièmes s'exprime en séparant par une virgule les deux derniers chiffres ;

Le nombre des millièmes s'exprime en séparant par une virgule les trois derniers chiffres et aïnsi de suite.

Si les chiffres composant le reste n'y suffisent pas, on devra ajouter avant ces chiffres, autant de zéro qu'il en faudra pour égaler la quantité des chiffres décimaux du quotient : par exemple , si le reste est 23 millièmes (le quotient ayant trois chiffres décimaux), il faudra ajouter avant 23 un zéro, c'est-à-dire qu'il faudra écrire 0,023 de façon que les chiffres après la virgule soient au nombre de 3 ; de façon analogue, si le reste est de 2 millièmes, comme dans la dernière division, il faut ajouter deux zéro avant le 2, en écrivant 0,002 de sorte que les chiffres décimaux soient toujours au nombre de 3.

3 - 1 - VALEURS APPROXIMATIVES

Les trois premières opérations de l'arithmétique, c'est-à-dire l'addition, la soustraction et la multiplication, ont la propriété intéressante de présenter toujours un résultat exact, qu'il s'agisse d'un nombre entier ou d'un nombre décimal (c'est-à-dire sans ou avec virgule).

La division, par contre, constitue une exception parce qu'elle peut présenter dans certains cas un résultat exact, entier ou décimal et dans d'autres cas, un résultat proche du résultat exact, mais ne coïncidant pas avec celui-ci, car à la fin de l'opération, il y a un reste, c'est-à-dire qu'une partie du dividende reste encore à diviser.

On pourrait croire que le fait d'avoir obtenu un résultat proche du résultat exact, mais toutefois incomplet, est dû au fait que l'opération a été interrompue avant son terme, c'est-à-dire avant d'arriver au reste nul.

Ceci peut être vrai dans certains cas, mais il y a des cas très nombreux dans lesquels même en continuant l'opération, on ne pourrait jamais parvenir à un résultat exact.

Lorsqu'il n'est pas possible d'arriver à un résultat exact, soit parce que l'opération n'aurait pas de fin, soit parce que le calcul serait trop long, il faut décider à quel point on doit interrompre la division, c'est-à-dire qu'il faut choisir la valeur approximative du quotient, qui, prise à la place de la valeur exacte, introduit une erreur négligeable.

La détermination d'une valeur approximative dépend de la nature du problème que la division doit résoudre.

Voyons un cas pratique.

Una automobile parcourt 1000km en 15 heures ; calculons sa vitesse moyenne.

D'après la première leçon de physique, nous savons que l'on peut calculer la vitesse en divisant la longueur du parcours par la mesure du temps : par conséquent, en effectuant la division 1000 : 15 nous obtiendrons la valeur de la vitesse exprimée en km à l'heure.

	1000	15
	100	66
Reste	10	

A ce point, nous pourrions interrompre l'opération en concluant que l'automobile a couvert le parcours à la vitesse moyenne d'environ 66km à l'heure.

Mais cette valeur n'est qu'approximative : elle serait exacte si le parcours était de 990km mais étant donné que l'automobile a parcouru 10km de plus (qui sont indiqués par le reste 10), on doit conclure que la valeur exacte de la vitesse est supérieure à 66km à l'heure.

D'autre part, la vitesse n'atteint pas 67km à l'heure, parce que dans ce cas, le quotient de la division serait égal à 67 ; donc au point où nous avons laissé la division nous pouvons seulement affirmer que la vitesse est comprise entre 66 et 67 km à l'heure.

Pour indiquer cette vitesse, nous pouvons utiliser la première valeur (66km/h) inférieure à la valeur exacte, qui, par conséquent, sera appelée VALEUR APPROXIMATIVE PAR DEFAUT ; mais nous pourrons également utiliser la seconde valeur (67km/h) supérieure à la valeur exacte qui par conséquent est appelée VALEUR APPROXIMATIVE PAR EXCES.

La différence entre ces deux valeurs est de 1 km à l'heure ; par conséquent l'erreur commise en admettant l'une ou l'autre valeur est certainement inférieure à 1km à l'heure. Cette erreur peut être négligeable si l'on ne désire pas évaluer la vitesse de façon extrêmement précise, mais elle deviendrait excessive en d'autres cas, par exemple, lorsqu'il s'agit d'indiquer les vitesses atteintes par différents coureurs dans une course sportive. Dans ce cas, il faudrait pousser la division jusqu'au premier chiffre décimal.

Reprenons donc le calcul de la division :

	1 000,00	15
	100	66,6
	100	
Reste	10	

Arrêtons là le calcul et observons que le reste est toujours égal à 10.

Tout à l'heure, le nombre 10 indiquait le nombre de kilomètres, cette fois-ci, le reste 10 indique le nombre de dixièmes de kilomètre dont on n'a pas encore tenu compte parce que la division n'a pas été poussée assez loin.

Le fait que le reste soit toujours égal à 10 nous fait immédiatement comprendre qu'il ne sera jamais possible, aussi loin que l'on pousse le calcul, de parvenir à un résultat exact, parce que nous aurons toujours ce même reste.

Mais, le fait d'avoir porté le calcul jusqu'à la première décimale (66,6) permet déjà d'indiquer la valeur de la vitesse avec une plus grande précision. Evidemment celle-ci aurait été encore plus grande si nous étions parvenus à la 2ème décimale (66,66) à la troisième décimale (66,666) et ainsi de suite.

La valeur de 66,6km à l'heure est encore une valeur approximative par défaut, mais elle est plus proche de la valeur exacte que la précédente valeur approximative par défaut (66km à l'heure) ; 66,66km à l'heure, 66,666km à l'heure, etc ...., sont des valeurs approchées par défaut de plus en plus exactes.

Confrontons maintenant les valeurs approximatives par excès avec chacune des valeurs approximatives par défaut : c'est-à-dire 66,7 avec 66,6; 66,67 avec 66,66 ; 66,667 avec 66,666km à l'heure.

La différence entre les deux valeurs de chacune de ces paires, diminue au fur et à mesure qu'augmente le nombre de chiffres décimaux : pour 66,6 et 66,7, la différence est de un dixième de km/h ; pour 66,66 et 66,67 elle est de un centième de km/h; pour 66,666 et 66,667 elle est de un millième de km/h et ainsi de suite.

On peut donc conclure que l'erreur que l'on a commise en choisissant l'une ou l'autre des deux valeurs approximatives, diminue progressivement au fur et à mesure de l'augmentation du nombre des chiffres décimaux, et qu'elle est respectivement inférieure à un dixième de km/h en prenant la valeur 66,6 ou bien 66,7 ; d'un centième de km/h en choisissant la valeur 66,66 ou 66,67 ; d'un millième de km/h en choisissant la valeur 66,666 ou 66,667.

Supposons que dans le problème qui nous occupe, une erreur inférieure à un centième de km/h soit jugée négligeable ; nous pouvons donc indiquer la vitesse par les valeurs approximatives 66,66 ou 66,67 km/h.

Nous pouvons maintenant nous demander : est-il absolument indifférent d'utiliser la valeur approximative par défaut ou la valeur approximative par excès ? est-il possible que l'une de ces deux valeurs convienne mieux ?

La réponse à ces questions dépend du dernier chiffre décimal du quotient.

— Si le chiffre décimal est supérieur à 5, il convient de choisir la valeur approximative par excès ;

— Si le chiffre décimal est inférieur à 5, il convient de choisir la valeur approximative par défaut ;

— Si le chiffre décimal est égal à 5, on peut opter indifféremment pour une valeur approximative par excès ou par défaut.

Dans notre cas, le dernier chiffre est égal à 6, c'est-à-dire supérieur à 5 ; il convient donc d'exprimer la vitesse au moyen d'une valeur approchée par excès : soit 66,67 km/h.

Dans les calculs que nous effectuerons dorénavant, dans le cas où il ne sera pas possible d'obtenir un résultat exact, ou lorsqu'il sera fastidieux d'écrire tous les chiffres décimaux résultant des opérations, on utilisera des valeurs approximatives par excès ou par défaut, en appliquant toujours le critère qui vient d'être énoncé.

Au cours de la prochaine leçon de mathématiques, nous traiterons un sujet très intéressant : celui des REPRESENTATIONS GRAPHIQUES, qui sont très utilisées en électronique.

EXERCICES DE REVISION SUR LA LECON MATHEMATIQUES 1

1- Qu'appelle-t-on une formule ?

2- Comment appelle-t-on deux ou plusieurs formules qui expriment d'une façon différente, le même lien entre deux grandeurs données ?

3- Est-il possible d'obtenir à partir d'une formule donnée, toutes les autres formules qui lui sont équivalentes ?

4- Les multiplications R x I et I x R ont-elles les mêmes résultats ?

5- Les formules A = B et $B = \frac{C}{A}$ sont-elles équivalentes ?

6- Si dans une formule se trouvent représentées quatre grandeurs variables, combien y-a-t-il de formules équivalentes possibles ?

7- Contrôlez, au moyen de la preuve par 9, la multiplication suivante : 301,41 x 70,02 = 21 104,7282,

8- En effectuant une division, est-il toujours possible d'obtenir un quotient exact ?

9- Quand il n'est pas possible d'obtenir un quotient exact ou quand il est fastidieux de calculer tous les chiffres décimaux d'un quotient exact, comment exprime-t-on le résultat de la division ?

10- Quand convient-il d'utiliser une valeur approximative par excès et quand convient-il d'utiliser une valeur approximative par défaut ?